ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών απόδειξη παράγρ.1.8 σχολικό βιβλίο

Α2. Ορισμός παράγρ. 2.2 σχολικό βιβλίο

Α3. (Λ) πχ $f(x)=x^3 \,|\mathbb{R}\ f\ \textit{γνησίως αύξουσα}\,|\mathbb{R}$ αλλά $f'(x)=3x^2 \geq 0$ στο $\mathbb{R}$.

Α4. α) → Λ, β) → Σ, γ) → Σ, δ) → Σ, ε) → Σ,

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\mathrm{A}_f=(1,+\infty) \quad \mathrm{A}_g=\mathbb{R}$

Η fog ορίζεται στο σύνολο

$\mathrm{A}_{fog}=\{x\in \mathrm{A}_g \text{ ώστε } \mathrm{g}(x)\in \mathrm{A}_f\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ ώστε } \mathrm{e}^x>1\}=(0,+\infty).$

Οπότε $(fog)(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+2}{\mathrm{e}^x-1},\ x>0.$

Β2. **Έστω** $x_1,x_2\in(0,+\infty):(fog)(x_1)=(fog)(x_1)\Rightarrow \dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow(e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1)=(e^{x_2}+2)(e^{x_1}-1)\Rightarrow e^{x_1x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1x_2}-e^{x_2}+2e^{x_1}-2\Rightarrow$

$\Rightarrow 3e^{x_1}=3e^{x_2}\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2.$

Οπότε fog είναι 1-1 άρα υπάρχει η

$(fog)^{-1} : (fog)\big((0,+\infty)\big) \to \mathbb{R}$

$Είναι \quad y = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y + 2 \qquad (1)$

Αν $y = 1$ η (1) $\Leftrightarrow 0e^x = 3$ αδύνατη, άρα $1 \notin (fog)\big((0,+\infty)\big)$

•Αν $y \neq 1$ η (1) $\Leftrightarrow e^x = \dfrac{y+2}{y-1}$.

Πρέπει $\dfrac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y < -2$ ή $y > 1$ (2)

και

$$x = \ln(\frac{y+2}{y-1}) \quad αλλά \;\; x > 0 \Leftrightarrow \ln(\frac{y+2}{y-1}) > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1 \quad (3)$$

Από (4), (3) τελικά $y > 1$

Έτσι: $\varphi(x) = (fog)^{-1} = \ln(\dfrac{x+2}{x-1}), \;\; x > 1$

Β3. Για $x > 1$: $\varphi'(x) = \dfrac{x-1}{x+2}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)' = \dfrac{x-1}{x+2}\dfrac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 2}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x+2)(x-1)^2} < 0$

Άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Β4. $$\lim_{x \to +1^+} \varphi(x) = \lim_{x \to +1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \overset{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim_{n \to +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \overset{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim_{n \to 1} \ln u = \ln 1 = 0.$$

ή για το (Β2) μελετάμε τη μονοτονία της *fog* μέσω παραγώγου και σύνολο τιμών της με όρια.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών.

Η f συνεχής στο $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ομοίως ως πράξεις μεταξύ συνεχών.

Αφού είναι συνεχής η f πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Άρα πρέπει :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = \lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x) = 1 - \ln\lambda \Leftrightarrow$$

$1 - \ln\lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln\lambda = 1 - \lambda \Leftrightarrow \ln\lambda + \lambda - 1 = 0.$ (1)

Θεωρώ $\varphi(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$ με $\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα

στο $(0,+\infty)$. Από (1) είναι $\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = \varphi(1) \underset{\varphi(1-1)}{\overset{\varphi\,\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow}} \lambda = 1$.

Γ2 Είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Για $x < 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{1 - 1 + x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x}$

Επίσης $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

Για $x > 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$, άρα $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

Επομένως $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$

Άρα η εφαπτόμενη στο Α $(0,1)$ έχει εξίσωση:

$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη με τον άξονα xx' είναι:

$\varepsilon\varphi\omega = f'(0) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$ $(\omega \in [0,\pi))$..

Γ3. Για $x < 0$: $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{-(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Για $x > 0$; $f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$

Για $x \le 0$ είναι $f'(x) > 0$.

Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}: f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ συν$x -$ ημ$x = 0 \Leftrightarrow$ ημ$x =$ συνx

$\overset{\text{συν}x\neq 0}{\Leftrightarrow}$ εφ$x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$ αφού $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

Επειδή λοιπόν η f' ορίζεται στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$ και $f'(x) = 0$ στα $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$ αυτά είναι και τα κρίσιμα σημεία.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - a)$.

Για $y = 0 \Rightarrow -f(a) = f'(a)x - af'(a) \Leftrightarrow x = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα $x'x$ είναι

$\mathrm{B}\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$

Επομένως $\mathrm{x_B} = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{(1-a)^2}} = a - (1-a) = 2a - 1.$

Άρα την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι:

$\mathrm{x_B}(t) = 2a(t) - 1 \Rightarrow \mathrm{x'_B}(t) = 2a'(t) \Rightarrow \mathrm{x'_B}(t) = 2\left(-\frac{a(t)}{3}\right) \Rightarrow \mathrm{x'_B}(t) = -\frac{2}{3}a(t)$ (1)

Όμως ισχύει $a(t_0) = -1$

Από (1) για $t = t_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}a(t_0) \Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}(-1) \Rightarrow x'_B(t_0) = \frac{2}{3} \quad \frac{\text{μονάδα μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$$

Δ1 $f'(x) = e^x + 2x - e$

· η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) = 1 - e < 0 \\ f'(1) = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0)\cdot f'(1) < 0$$

Από Θ. Bolzano $\exists\, x_0 \in (0,1) \cdot f'(x_0) = 0$

Έχω $f''(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow f' \uparrow$

οπότε για $x < x_0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \downarrow$ στο $[0, x_0]$

για $x > x_0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $[x_0, 1)$

οπότε έχει ολικό ελάχιστο το x_0

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ $f(x_0)$.	$\nearrow$

Έχω $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0 \Leftrightarrow$

$$e^{x_0}=e-2x_0$$

οπότε $f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1$

$$=e-2x_0+x_0^2-ex_0-1$$

$$=x_0^2-(e+2)x_0+e-1$$

Δ3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)} + ημ\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]$

Έχω $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = f(x_0)-f(x_0)=0$

και $f(x)>f(x_0)$ κοντά στο x_0

αφού στο x_0 έχω ολικό ελάχιστο

άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)} = +\infty$

Επίσης έχω για $x\neq x_0$: $-1 \le ημ\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)$ άρα

$$\frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1 \le \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$$

Επομένως από γνωστή πρόταση προκύπτει ότι

ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)} + ημ\dfrac{1}{x-x_0}\right) = +\infty$

Δ3. Έστω $g(x) = f(x) + x - x_0$

Η g συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως πράξεις συνεχών

$g(1) = \cancel{f(1)}^{0} + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$

$g(x_0) = f(x_0) < f(1) = 0$ από (Δ1)

άρα $g(1)g(x_0) < 0$

Από Θ. Bolzano $\exists\, \rho \in (x_0, 1) : g(\rho) = 0 \Leftrightarrow$

$f(\rho) + \rho = x_0$

$g'(x) = f'(x) + 1$

Για $x > x_0 \overset{f'\uparrow}{\Longrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$

Άρα $g'(x) > 0 \ \forall x \in (x_0, 1) \Rightarrow g \nearrow$ στο $[x_0, 1]$

Άρα η ρ είναι μοναδική ρίζα στο $[x_0, 1]$

Δ4.

Ισχύει $\quad f(x_0) > f(\rho)\left(f'(\kappa)+1\right) \Leftrightarrow$

$$f(x_0) > f(\rho)\cdot f'(\kappa) + f(\rho) \Leftrightarrow$$

$$f(x_0)-f(\rho) > (x_0-\rho)\, f'(\kappa) \overset{x_0-\rho<0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} < f'(\kappa)$$

Από ΘΜΤ για την f στο $[x_0, \rho]$

τότε $\exists\, \xi \in (x_0, \rho)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}$

Όμως $\xi < \kappa \underset{\xi<\rho<\kappa}{\overset{f'\uparrow}{\Longrightarrow}} f'(\xi) < f'(\kappa)$ και

$$\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} < f'(\kappa)$$

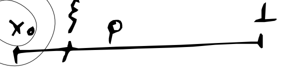
$\underline{\Delta_4}$ $\quad$ 2η λύση

$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa)+1) \Leftrightarrow f(x_0) > f(\rho)f'(\kappa) - f(\rho)$

$\Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho)f'(\kappa) - f(\rho) > 0$

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση
$\phi(x) = f(x_0) - f(\rho)f'(x) - f(\rho)$ με $x \in [\rho, 1)$
είναι $\phi(x) > 0$.

Στο $[x_0, \rho]$ από ΘΜΤ υπάρχει



ένα τουλ. $\xi \in (x_0, \rho)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} \Rightarrow f(x_0) - f(\rho) = f'(\xi)(x_0 - \rho)$$

Από το Δ_3 είναι $f(\rho) + \rho = x_0 \Rightarrow f(\rho) = x_0 - \rho < 0$.

Άρα $\phi(x) = f'(\xi)(x_0 - \rho) - (x_0 - \rho)f'(x) \Rightarrow$

$\phi(x) = (x_0 - \rho)(f'(\xi) - f'(x))$

Είναι $\phi'(x) = (x_0 - \rho)(-f''(x)) > 0$, αφού $x_0 - \rho < 0$ κ' $f''(x) > 0$

$\Rightarrow \phi \uparrow$ στο $[\rho, 1]$. Άρα για $\rho < x < 1$

$\Rightarrow \phi(x) > \phi(\rho) = (x_0 - \rho)(f'(\xi) - f'(\rho))$ (1)

Αφού $\xi < \rho \xRightarrow[f'\uparrow]{f''>0} f'(\xi) < f'(\rho) \Rightarrow f'(\xi) - f'(\rho) < 0$

και $x_0 - \rho < 0 \xRightarrow{(1)} \phi(x) > \phi(\rho) > 0 \Rightarrow \phi(x) > 0$