

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. σχολικό βιβλίο σελίδα 99

A2.

α. Λάθος

β. σχολικό βιβλίο σελίδα 35

η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

A3. σχολικό βιβλίο σελίδα 216

A4.

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 1 - 4 \cdot \frac{-2x}{x^4} = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (x^3 + 8) > 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x^3	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^3 + 8$	$-$	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$-$	$+$	$+$
f	1	2	1	1

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = -2$ με τιμή $f(-2) = -3$

B2.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως ρητή με $f''(x) = -8 \cdot \frac{3x^2}{x^6} = -24 \cdot \frac{1}{x^4}$ είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, αφού $x^4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, οπότε

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$

Η f δεν έχει σημεία καμπής.

B3.

Για κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty, \text{ αφού για } x \rightarrow 0 \text{ το } x^2 > 0 \text{ με } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Για πλάγια οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1 \in \mathbb{R}, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x \right) = 0 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = \lambda x + \beta \Rightarrow y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Όμοια έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1 \in \mathbb{R}, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

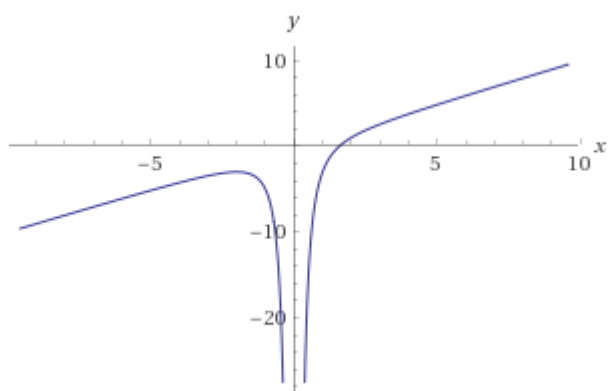
$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x \right) = 0 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = \lambda x + \beta \Rightarrow y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f'	+	$\circ$ -	+	
f''	-	-	-	
f	6	8	8	

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0$
- $f(-2) = -3$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ από το B3.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$



Επιμέλεια απαντήσεων: Τσαλιγόπουλος Μίλτος, Βαλιάδη Μαρία

νέο φροντιστήριο