	ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
νέο φροντιστήριο	ΤΑΞΗ	Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	
	ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ	2017-2018
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ώρες
	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ	

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Μονάδες 4

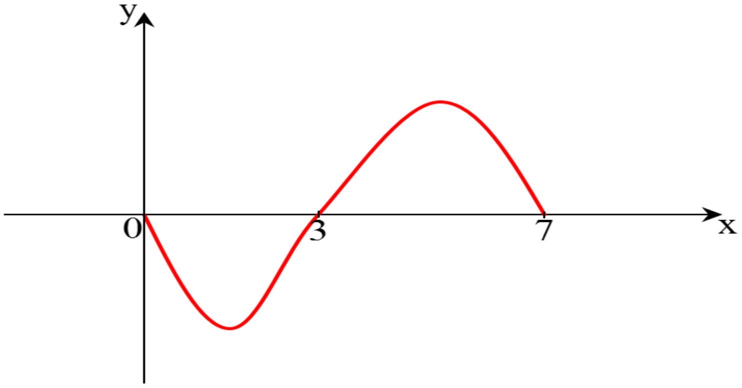
ii. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

Μονάδες 3

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

Α3. Στο διάγραμμα που δίνεται έχουμε την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Να αιτιολογήσετε την παρακάτω πρόταση :

Το ολοκλήρωμα $\int_0^7 f(x)dx$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 4

Α4. Για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να σχεδιάσετε κατάλληλο διάγραμμα που να δίνει τη γεωμετρική της ερμηνεία.

i. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]\subseteq D_f$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον ισχύουν $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$.

ii. Έστω f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Καθώς το x αυξάνεται, η εφαπτόμενη της C_f στρέφεται κατά την θετική φορά.

Μονάδες 3 + 3

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\beta)<f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)<0$.

ii. Κάθε συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, παίρνει στο Δ μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή t δίνεται από την συνάρτηση s(t), όπου ο χρόνος t μετριέται σε δευτερόλεπτα (s). Για την ταχύτητα του u που μετριέται σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο (m/s) ισχύει :

$$[(t-1)^2+1]\frac{du}{dt}=2[1-(t-1)u(t)]$$

Αν την χρονική στιγμή t = 1s είναι ακίνητο

Β1. Να αποδείξετε ότι $u(t)=\dfrac{2t-2}{(t-1)^2+1}$ και να υπολογίσετε την τιμή του t για την οποία η ταχύτητα είναι 1m/s.

Μονάδες 5

Β2. Αφού αποδείξετε ότι η συνάρτηση θέσης του κινητού για κάθε $t\geq 0$ είναι $s(t)=\ln[(t-1)^2+1]+\kappa$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$ σταθερά, να βρείτε την απόσταση μεταξύ των δυο θέσεων του κινητού, στις οποίες οι ταχύτητές του είναι αντίστοιχα 0m/s και 1m/s, καθώς και τη μέση ταχύτητά του στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

Μονάδες 5

Β3. Ποιο είναι το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το κινητό στη διάρκεια των πρώτων 3s; Να παραστήσετε σχηματικά την κίνησή του σε αυτό το χρονικό διάστημα.

Μονάδες 5

Β4. Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται; Ποιο είναι το διάστημα τιμών του μέτρου της;

Μονάδες 5

Β5. Αν την χρονική στιγμή t = 0s βρίσκεται σε απόσταση ln2 από την αρχή του άξονα κίνησης του, να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης s(t).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f\left(f(x)\right)=x+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

Γ1. Η συνάρτηση f είναι 1-1.

Μονάδες 4

Γ2. $f(0)=0$.

Μονάδες 3

Γ3. Αν $f'(0)>0$ τότε $f'(0)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Μονάδες 7

Γ4. Ισχύει $f^{-1}(x)=f(x)-x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ5. $\int_0^2 f\left(x\right)dx=2018$ αν η f είναι συνεχής και επιπλέον ισχύει :

$$\int_0^2 f\left(x\right)dx+\int_0^2 f^{-1}(x)dx=4034.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & -1<x\leq 0\\ \lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu, & x>0\end{cases}$ όπου (α_ν) ακολουθία με

$\alpha_\nu=\dfrac{x\nu^3-\nu^2}{x^2\nu^3+\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*, x>0$.

Δ1. Αφού δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x>0$, να παραστήσετε γραφικά την f και με την βοήθεια της C_f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της και να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες 3

Δ2. Να βρείτε

i. Την συνάρτηση f^{-1} και

ii. Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Μονάδες 3 + 5

Δ3. Έστω Ε(α) το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=\alpha$ και Ε(β) το εμβαδόν του χωρίου Ω_2 που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e, x=\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

i. Να υπολογίσετε τα Ε(α) , Ε(β) για τις διάφορες τιμές των α, β.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(α) διαρκώς μειώνεται χωρίς η τιμή του να μπορεί να γίνει ίση με 1.

iii. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{\beta\to 0}E(\beta)$ και $\lim\limits_{\beta\to+\infty}E(\beta)$ και να βρείτε το διάστημα τιμών του β για το οποίο τα χωρία Ω_1 και Ω_2 είναι ισεμβαδικά.

Μονάδες 5 + 5 + 4