ΘΕΜΑ Α

Α1. i. Σχολικό βιβλίο σελίδα 106.
ii. Σχολικό βιβλίο σελίδα 116.

Α2.Σχολικό βιβλίο σελίδα 185.

Α3.Ισχύει ότι $\int_0^7 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx$ (1).

Στο $[0,3]$ είναι $f(x)\le 0$ οπότε το εμβαδό του χωρίου Ω_1 που ορίζεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=3$ είναι $E_1 = \int_0^3 -f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^3 f(x)dx = -E_1$ (2).

Στο $[3,7]$ είναι $f(x)\ge 0$ οπότε το εμβαδό του χωρίου Ω_2 που ορίζεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=3$, $x=7$ είναι $E_2 = \int_3^7 f(x)dx$ (3).

Οπότε η (1) μέσω των (2) και (3) γράφεται $\int_0^7 f(x)dx = -E_1 + E_2 = E_2 - E_1$.

Α4.i. Σχολικό βιβλίο σελίδα 73, σχήμα 63(β).
ii. Σχολικό βιβλίο σελίδα 155, σχήμα 39(α)

Α5.i. Σωστό, ii. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.Έχουμε $\left[(t-1)^2+1\right]\frac{du}{dt} = 2\left[1-(t-1)u(t)\right] \Leftrightarrow \left[(t-1)^2+1\right]u'(t) + 2(t-1)u(t) = 2$

$\Leftrightarrow \left[(t-1)^2+1\right]u'(t) + \left[(t-1)^2+1\right]' u(t) = 2 \Leftrightarrow \left(\left[(t-1)^2+1\right]u(t)\right)' = (2t)'$, για κάθε $t\ge 0$.

Άρα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\left[(t-1)^2+1\right]u(t) = 2t+c$ (1), για κάθε $t\ge 0$.

Δίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t=1s$ το κινητό είναι ακίνητο, άρα $u(1)=0$. Οπότε για $t=1$ από τη σχέση (1) προκύπτει: $u(1)=2+c \Leftrightarrow 0=2+c \Leftrightarrow c=-2$.

Επομένως $(1) \Leftrightarrow \left[(t-1)^2+1\right]u(t) = 2t-2 \Leftrightarrow u(t) = \frac{2t-2}{(t-1)^2+1}$, αφού $(t-1)^2+1\neq 0$, για κάθε $t\ge 0$.

Είναι $u(t)=1 \Leftrightarrow \frac{2t-2}{(t-1)^2+1} = 1 \Leftrightarrow 2t-2 = t^2-2t+2 \Leftrightarrow t^2-4t+4=0 \Leftrightarrow (t-2)^2=0 \Leftrightarrow t=2$.

Άρα όταν $t=2s$ η ταχύτητα του κινητού είναι $1m/s$.

Β2.

- Βρίσκουμε τη συνάρτηση θέσης του κινητού.

  Ισχύει $s'(t)=u(t) \Leftrightarrow s'(t) = \frac{2(t-1)}{(t-1)^2+1}$

$$\Leftrightarrow s'(t) = \frac{\left[(t-1)^2+1\right]'}{(t-1)^2+1}$$ (2) και εφόσον για κάθε $t \ge 0$ ισχύει $(t-1)^2+1>0$

$$(2) \Leftrightarrow s'(t) = \left(\ln\left[(t-1)^2+1\right]\right)'$$ για κάθε $t \ge 0$.

Άρα υπάρχει σταθερά $k \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $s(t) = \ln\left[(t-1)^2+1\right]+k$ για κάθε $t \ge 0$.

- Έχουμε ότι $u(1)=0$ (δεδομένο) και $u(2)=1$ (Β1. ερώτημα). Οπότε η ζητούμενη απόσταση είναι $d = |s(2)-s(1)| \overset{(3)}{=} |(\ln 2+k)-(\ln 1+k)| = \ln 2\,m$ και η μέση ταχύτητά του στο αντίστοιχο διάστημα είναι $\dfrac{s(2)-s(1)}{2-1} = \ln 2 \ {}^{m}\!/_{s}$.

Β3. Το πρόσημο της ταχύτητας $u(t) = \dfrac{2(t-1)}{(t-1)^2+1}$ του κινητού για $t \in [0,3]$ δίνεται στον πίνακα:

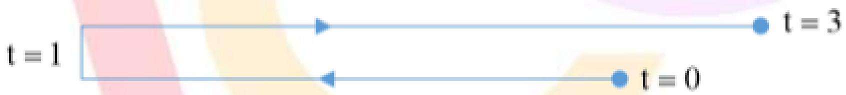
t	0		1		3
u(t)		−	0	+	

Οπότε η απόσταση που διανύθηκε από το κινητό είναι

- Στη διάρκεια του πρώτου δευτερολέπτου $s_1 = |s(1)-s(0)| = |(\ln 1+k)-(\ln 2+k)| = \ln 2\,m$.
- Από $t=1$ μέχρι $t=3$ $s_2 = |s(3)-s(2)| = |(\ln 5+k)-(\ln 2+k)| = (\ln 5-\ln 2)m$.

Άρα το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το κινητό στη διάρκεια των πρώτων $3s$ είναι
$s = s_1+s_2 = \ln 2+\ln 5-\ln 2 = \ln 5 m$.

Από το πρόσημο της ταχύτητας έχουμε ότι: για $t \in [0,1)$ το κινητό κινείται στην αρνητική κατεύθυνση και για $t \in (1,3]$ κινείται στη θετική κατεύθυνση. Οπότε σχηματικά η κίνηση του για $t \in [0,3]$ είναι:



Β4. Βρίσκουμε την παράγωγο της ταχύτητας $u(t) = \dfrac{2(t-1)}{(t-1)^2+1}$ που είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, ως πηλίκο παραγωγίσιμων, άρα και συνεχής για κάθε $t \ge 0$.

$$u'(t) = \left(\frac{2(t-1)}{(t-1)^2+1}\right)' = \frac{2\left[(t-1)^2+1\right]-2(t-1)\cdot 2(t-1)}{\left[(t-1)^2+1\right]^2} = \frac{2\left[1-(t-1)^2\right]}{\left[(t-1)^2+1\right]^2} = \frac{2t(2-t)}{\left[(t-1)^2+1\right]^2}.$$

Έχουμε για $t>0$ ότι $2t>0$ και $\left[(t-1)^2+1\right]^2>0$ Οπότε ο πίνακας προσήμου της $u'(t)$ και μονοτονίας της $u(t)$ είναι

t	0		2		$+\infty$
u'(t)		+	0	−	
u(t)	-1	↗	1	↘	0

Άρα $u'(t) > 0$ στο $(0,2)$ οπότε η ταχύτητα αυξάνεται για $t \in [0,2]$ και $u'(t) < 0$ στο $(2,+\infty)$ οπότε η ταχύτητα μειώνεται στο $[2,+\infty)$.

- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $u(t)$ για $t \in \Delta = [0,+\infty)$.

  Έχουμε $u(0) = -1$, $u(2) = 1$ και $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{2(t-1)}{(t-1)^2+1} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{2t}{t^2} = 0$. Άρα αφού u συνεχής, γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = [0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [2,+\infty)$ είναι $u(\Delta_1) = [-1,1]$, $u(\Delta_2) = (0,1]$, οπότε $u(\Delta) = u(\Delta_1) \cup u(\Delta_2) = [-1,1]$.

  Άρα για κάθε $t \in \Delta$ έχουμε $-1 \le u(t) \le 1 \Leftrightarrow |u(t)| \le 1$ και $|u(t)| \ge 0$,

  Οπότε το διάστημα τιμών του μέτρου της ταχύτητας είναι $[0,1]$.

B5. Έχουμε $u(0) = -1 < 0$ δηλαδή το κινητό κινείται με αρνητική κατεύθυνση.

Άρα $s(0) = -\ln 2 \overset{B2}{\Leftrightarrow} \ln 2 + k = -\ln 2 \Leftrightarrow k = -2\ln 2$.

Οπότε $s(t) = \ln\left[(t-1)^2+1\right] - 2\ln 2$, $s'(t) = u(t) = \dfrac{2(t-1)}{(t-1)^2+1}$, $s''(t) = u'(t) = \dfrac{2t(2-t)}{\left[(t-1)^2+1\right]^2}$, $t \ge 0$.

Από τα ερωτήματα Β3 και Β4 έχουμε το πρόσημο των $s'(t)$ και $s''(t)$.

Βρίσκουμε $s(1) = -2\ln 2$, $s(2) = -\ln 2$ και $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left[(t-1)^2+1\right] - 2\ln 2 = +\infty$

($u = (t-1)^2+1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} u = \lim\limits_{t\to+\infty} t^2 = +\infty$, άρα $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left[(t-1)^2+1\right] = \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$).

Πίνακας μεταβολών

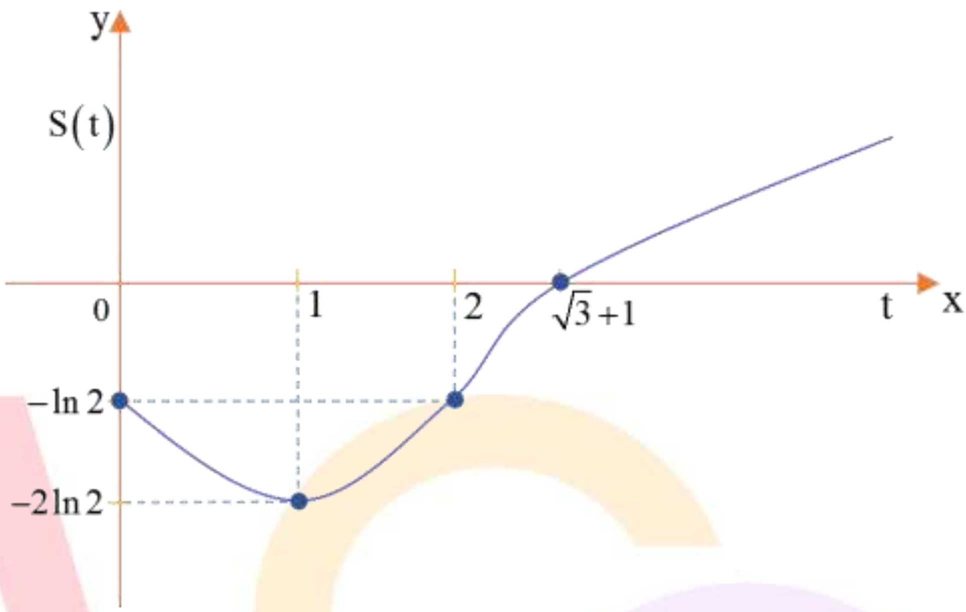
t	0		1		2		$+\infty$
$s''(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
$s'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
$s(t)$	$-\ln 2$	↘	$-2\ln 2$ Ο.Ε.	↗	$-\ln 2$ Σ.Κ.	↗	$+\infty$

Τα σημεία τομής της $s(t)$ με τον

- κατακόρυφο άξονα είναι το $(0,-\ln 2)$
- οριζόντιο άξονα είναι $\left(1+\sqrt{3},0\right)$ γιατί:

  $s(t) = 0 \Leftrightarrow \ln\left[(t-1)^2+1\right] = \ln 2^2 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 3 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}+1$ ($t = -\sqrt{3}+1 < 0$ απορρίπτεται).

Γραφική παράσταση της s(t)



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με $f(\alpha)=f(\beta)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha=\beta$.

Έχουμε $f(\alpha)=f(\beta)\overset{f\,\text{συνάρτηση}}{\Rightarrow} f\left(f(\alpha)\right)=f\left(f(\beta)\right)\overset{\text{υπόθεση}}{\Rightarrow}\alpha+f(\alpha)=\beta+f(\beta)\overset{f(\alpha)=f(\beta)}{\Rightarrow}\alpha=\beta$.

Άρα, η f είναι $1-1$.

Γ2. Για $x=0$ η σχέση $f\left(f(x)\right)=x+f(x)$ δίνει: $f\left(f(0)\right)=f(0)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}f(0)=0$

Γ3. Έστω η $f'(0)>0$, άρα f παραγωγίσιμη στο 0, άρα f συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$ και

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$.

Θέτοντας όπου x το $f(x)$, η αρχική σχέση δίνει $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f(x)+f\left(f(x)\right)$, δηλαδή

$f\left(x+f(x)\right)=f(x)+x+f(x)\Rightarrow f\left(x+f(x)\right)=2f(x)+x$.

Άρα για x κοντά στο 0 διαιρούμε με x και γίνεται

$$\frac{f\left(x+f(x)\right)}{x}=2\cdot\frac{f(x)}{x}+1\Rightarrow\frac{f\left(x+f(x)\right)}{x+f(x)}\cdot\frac{x+f(x)}{x}=2\frac{f(x)}{x}+1$$

$$\Rightarrow\frac{f\left(x+f(x)\right)}{x+f(x)}\cdot\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)=2\frac{f(x)}{x}+1\quad(1)$$ κοντά στο 0.

- Διαιρέσαμε με $x+f(x)$ διότι για x κοντά στο 0 είναι $x+f(x)\neq 0$,

  αφού αν $x+f(x)=0 \Rightarrow f\left(f(x)\right)=0 \Rightarrow f\left(f(x)\right)=f(0) \underset{1-1}{\overset{f}{\Longrightarrow}} f(x)=0 \Rightarrow f(x)=f(0) \underset{1-1}{\overset{f}{\Longrightarrow}} x=0$, άτοπο.

- Ισχύει $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x+f(x)\right)}{x+f(x)}$, γιατί αν θέσουμε $u=x+f(x)$,

  τότε, $x\to 0$, $u\to 0+f(0)$ (διότι f συνεχής στο 0). Δηλαδή $u\to 0$.

  Άρα, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x+f(x)\right)}{x+f(x)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=f'(0)$.

  Οπότε παίρνοντας όρια στη σχέση (1) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f\left(x+f(x)\right)}{x+f(x)}\cdot\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[2\dfrac{f(x)}{x}+1\right]$.

  Άρα, $f'(0)\cdot\left(1+f'(0)\right)=2f'(0)+1 \Rightarrow f'(0)+\left(f'(0)\right)^2=2f'(0)+1 \Rightarrow \left(f'(0)\right)^2-f'(0)-1=0$ και

  λύνοντας το τριώνυμο έχουμε $f'(0)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, δεκτή ή $f'(0)=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, όπου απορρίπτεται διότι

  $f'(0)>0$

Γ4. Στην σχέση $f\left(f(x)\right)=x+f(x)$, θέτουμε $f(x)=\psi$.

Επομένως $f(\psi)=x+\psi \Rightarrow x=f(\psi)-\psi,\ \psi\in\mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f^{-1}(x)=f(x)-x$.

Γ5. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η f^{-1} είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Οπότε ορίζονται τα ολοκληρώματα $\int_0^2 f(x)dx$ και $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$.

Έχουμε: $\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f^{-1}(x)dx=4034 \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx+\int_0^2\left(f(x)-x\right)dx=4034 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 xdx=4034 \Rightarrow 2\int_0^2 f(x)dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=4034 \Rightarrow$$

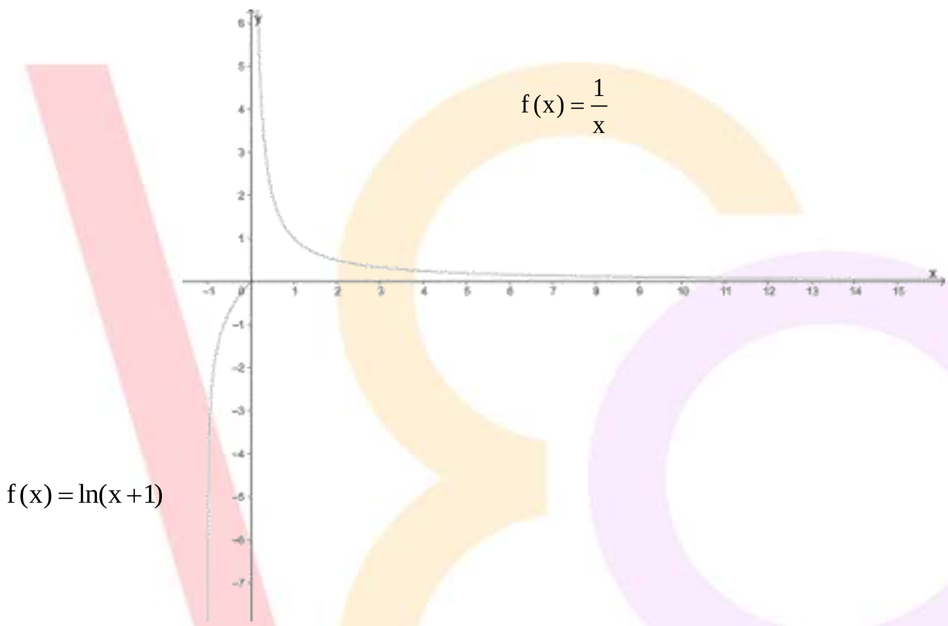
$$\Rightarrow 2\int_0^2 f(x)dx-\left(\frac{2^2}{2}-0\right)=4034 \Rightarrow 2\int_0^2 f(x)dx=4036 \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx=2018$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφόσον $x>0$ έχουμε $\lim\alpha_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{x\nu^3-\nu^2}{x^2\nu^3+\nu} = \lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{x\nu^3}{x^2\nu^3} = \dfrac{1}{x}$.

Οπότε $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1) & ,-1<x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & ,x>0\end{cases}$, με $D_f=(-1,+\infty)=\Delta$.

Για $x\in(-1,0]$ η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση κατά μία μονάδα προς τα αριστερά της $\ln x$ για $x\in(0,1]$.



Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta)=(-\infty,0]\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο, άρα η συνάρτηση f είναι 1-1.

Δ2. i. Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f θέτουμε $y=f(x)$ και λύνουμε ως προς το x, για κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της. Άρα:

I. $\begin{cases}f(x)=y\\ -1<x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x+1)=y\\ -1<x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=e^y\\ -1<x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e^y-1\\ -1<x\le 0\end{cases}$

Είναι $-1<x\le 0\Leftrightarrow -1<e^y-1\le 0\Leftrightarrow e^y\le 1\Leftrightarrow y\le 0$

II. $\begin{cases}f(x)=y\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}=y\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{y},y\ne 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{y},y>0\\ x>0\end{cases}$

Οπότε $f^{-1}(x)=\begin{cases}e^x-1 & ,x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & ,x>0\end{cases}$.

ii. Για τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουμε

- Με $x \in (0,+\infty)$ $f(x)=\frac{1}{x}$ και $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$, δηλαδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ ταυτίζονται. Επομένως έχουν άπειρα κοινά σημεία $M\left(x,\frac{1}{x}\right)$, $x>0$.
- Με $x \in (-1,0]$, αρχικά αναζητούμε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ που είναι λύσεις της εξίσωσης $\ln(x+1)=e^x-1 \Leftrightarrow \ln(x+1)-e^x+1=0$ (1).
  Θέτουμε συνάρτηση $h(x)=\ln(x+1)-e^x+1$ με $D_h=(-1,0]=A$.
  Η h είναι παραγωγίσιμη στο A ως άθροισμα των παραγωγίσιμων $\ln(x+1)$ (σύνθεση των παραγωγίσιμων $x+1$ και $\ln x$), $e^x,1$ άρα και συνεχής, με $h'(x)=\frac{1}{x+1}-e^x$. Για να προσδιορίσουμε το πρόσημο της h', που είναι συνεχής στο $(-1,0]$, βρίσκουμε
  $h''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-e^x<0$, για κάθε $x\in(-1,0)$. Άρα η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $A=(-1,0]$, επομένως με $-1<x<0 \Rightarrow h'(x)>h'(0)=0$.
  Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο A και επειδή $h(0)=\ln 1-e^0+1=0$, έχει μοναδική ρίζα $x=0$.
  Οπότε οι C_f και $C_{f^{-1}}$ για $x\in A$, έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $O(0,0)$.

  Τελικά τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι: $O(0,0)$ και $M\left(x,\frac{1}{x}\right)$ με $x>0$.

Δ3.i. Για να ορίζεται το $E(\alpha)$ πρέπει $-1<\alpha\le 0$.

- Αν $\alpha=0$ τότε $E(\alpha)=0$.
- Αν $-1<\alpha<0$, επειδή $f(x)=\ln(x+1)<0$ έχουμε

$$E(\alpha)=\int_\alpha^0 -\ln(x+1)dx=-\left[x\ln(x+1)\right]_\alpha^0+\int_\alpha^0\frac{x}{x+1}dx$$
$$=-\left[x\ln(x+1)\right]_\alpha^0+\int_\alpha^0\left(\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=-\left[x\ln(x+1)\right]_\alpha^0+\int_\alpha^0 1dx-\int_\alpha^0\frac{1}{x+1}dx$$
$$=-\left[x\ln(x+1)\right]_\alpha^0+(0-\alpha)-\left[\ln|x+1|\right]_\alpha^0$$
$$=-0+\alpha\ln(\alpha+1)-\alpha-0+\ln(\alpha+1)$$
$$=(\alpha+1)\ln(\alpha+1)-\alpha$$

Για να ορίζεται το $E(\beta)$ πρέπει $\beta>0$. Είναι $f(x)=\frac{1}{x}>0$, $x>0$.

- Αν $0<\beta<e$, έχουμε $E(\beta)=\int_\beta^e \frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_\beta^e=1-\ln\beta$.
- Αν $\beta=e$, έχουμε $E(\beta)=0$.
- Αν $\beta>e$, έχουμε $E(\beta)=\int_e^\beta \frac{1}{x}dx=\ln\beta-1$.

ii. $E(\alpha)=(\alpha+1)\ln(\alpha+1)-\alpha$, $\alpha\in(-1,0]=A$. Η E είναι παραγωγίσιμη στο A ως γινόμενο και άθροισμα των παραγωγίσιμων $\alpha+1$, $\ln(\alpha+1)$ (σύνθεση των παραγωγίσιμων $\alpha+1$, $\ln\alpha$), $-\alpha$, άρα είναι και συνεχής στο A, με

$$E'(\alpha)=\ln(\alpha+1)+(\alpha+1)\frac{1}{(\alpha+1)}-1=\ln(\alpha+1).$$

Είναι $-1<\alpha<0\Leftrightarrow 0<\alpha+1<1\Rightarrow \ln(\alpha+1)<0\Leftrightarrow E'(\alpha)<0$.

Άρα η E είναι γνησίως φθίνουσα στο A, με σύνολο τιμών $E(A)=\left[E(0),\lim\limits_{\alpha\to-1}E(\alpha)\right)=[0,1)$, γιατί

$$\lim_{\alpha\to-1}(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$$

$$=\lim_{\alpha\to-1}\frac{\ln(\alpha+1)}{\frac{1}{\alpha+1}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{\alpha\to-1}\frac{\frac{1}{\alpha+1}}{-\frac{1}{(\alpha+1)^2}}=\lim_{\alpha\to-1}(-\alpha-1)=0,$$ άρα $\lim\limits_{\alpha\to-1}E(\alpha)=0+1=1$ και $E(0)=1\ln1=0$.

Οπότε για κάθε $\alpha\in A$ ισχύει $0\le E(\alpha)<1$. Άρα αφού E γνησίως αύξουσα, το $E(\alpha)$ μειώνεται χωρίς η τιμή του να μπορεί να γίνει ίση με 1.

iii.

- Από i. ερώτημα έχουμε
  Για $0<\beta<e$, $E(\beta)=1-\ln\beta$ άρα $\lim\limits_{\beta\to0}E(\beta)=+\infty$.
  Για $\beta>e$, $E(\beta)=\ln\beta-1$ άρα $\lim\limits_{\beta\to+\infty}E(\beta)=+\infty$.
- Από ii. ερώτημα έχουμε $0\le E(\alpha)<1$ (1). Θέλουμε $E(\alpha)=E(\beta)$, άρα πρέπει λόγω της (1) $0\le E(\beta)<1$ (2).
  Αν $0<\beta<e$, (2) $\Leftrightarrow 0\le1-\ln\beta<1\Leftrightarrow 0<\ln\beta\le1\Leftrightarrow 1<\beta<e$.
  Αν $\beta=e$, (2) $\Leftrightarrow 0\le0<1$, ισχύει.
  Αν $\beta>e$, (2) $\Leftrightarrow 0\le\ln\beta-1<1\Leftrightarrow 1\le\ln\beta<2\Leftrightarrow e<\beta<e^2$.
  Τελικά $1<\beta<e^2\Leftrightarrow \beta\in(1,e^2)$.