ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολικό βιβλίο σελίδα 99

Α2.

α. Λάθος

β. σχολικό βιβλίο σελίδα 35

η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

Α3. σχολικό βιβλίο σελίδα 216

Α4.

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$, $x\in \mathbb{R}-\{0\}$

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=1-4\cdot\frac{-2x}{x^4}=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}=0 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}>0 \Leftrightarrow x^3\cdot\left(x^3+8\right)>0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x^3	$-$	$-$		$+$
x^3+8	$-$	0 $+$		$+$
f'	$+$	$-$		$+$
f	1	2		1

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0=-2$ με τιμή $f(-2)=-3$

B2.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως ρητή με $f''(x)=-8\cdot\frac{3x^2}{x^6}=-24\cdot\frac{1}{x^4}$ είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, αφού $x^4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, οπότε

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$

Η f δεν έχει σημεία καμπής.

B3.

Για κατακόρυφη ασύμπτωτη

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$, αφού για $x\to 0$ το $x^2>0$ με $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Για πλάγια οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1\in\mathbb{R} \quad \text{, αφού } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=0 \quad \text{αφού } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

Άρα η ευθεία $y=\lambda x+\beta \Rightarrow y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Όμοια έχουμε

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1\in\mathbb{R} \quad \text{, αφού } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

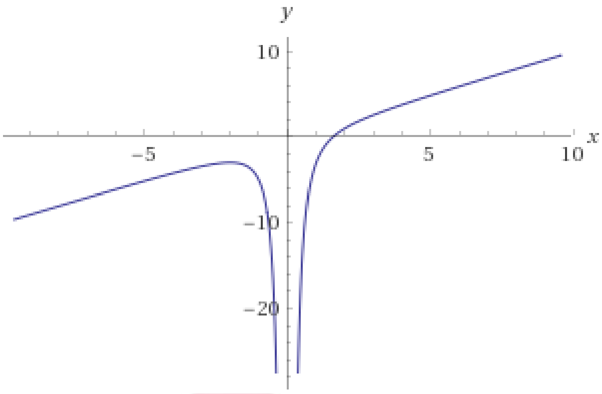
$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=0 \quad \text{αφού } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

Άρα η ευθεία $y=\lambda x+\beta \Rightarrow y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f'	+	0 −		+
f''	−	−		−
f	6	8		8

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$
- $f(-2)=-3$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ από το B3.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x^2}\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Με το τμήμα μήκους x κατασκευάζουμε τετράγωνο, άρα η πλευρά είναι $\frac{x}{4}m'$ συνεπώς το εμβαδόν του είναι $E_1(x) = (\frac{x}{4})^2 = \frac{x^2}{16}m^2$. Με το τμήμα μήκους 8 – x που απομένει κατασκευάζουμε κύκλο που έχει μήκος (8 – x)m. Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου τότε $L = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{L}{2\pi} \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}m$.

Άρα το εμβαδόν του κύκλου είναι $E_2(x) = \pi\rho^2 \Leftrightarrow E_2(x) = \pi \cdot \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{\cancel{\pi}\cdot(8-x)^2}{4\pi^{\cancel{2}}} = \frac{(8-x)^2}{4\pi}m^2$

Άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι

$E(x) = E_1(x) + E_2(x) \Leftrightarrow E(x) = \frac{\pi x^2}{16\pi} + \frac{4\cdot(64-16x+x^2)}{16\pi} \Leftrightarrow E(x) = \frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, $x \in (0,8)$

Γ2. Για $x \in (0,8)$ η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $E'(x) = \frac{2(\pi+4)}{16\pi}\cdot x - \frac{4}{\pi}$, $x \in (0,8)$.

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\pi+4)}{16\pi}x - \frac{4}{\pi} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\pi+4)}{16\pi}x = \frac{4}{\pi} \Leftrightarrow x = \frac{4\cdot 16\pi}{2\pi(\pi+4)} \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}m$.

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$E'(x)$		−	0	+	
$E(x)$		↘		↗	
			Ο.Ελάχιστο		

Η $E(x)$ παρουσιάζει στο $x=\frac{32}{\pi+4}$ ολικό ελάχιστο το

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{(\pi+4)\cdot\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2-64\cdot\frac{32}{\pi+4}+256}{16\pi}=\ldots=\frac{16}{\pi+4}\ .$$

Για $x=\frac{32}{\pi+4}$ η διάμετρος του κύκλου είναι

$$2\rho=2\cdot\frac{8-x}{2\pi}=2\cdot\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{2\pi}=\frac{\frac{8(\pi+4)-32}{\pi+4}}{2\pi}=2\cdot\frac{8\pi+32-32}{2\pi(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}\,\mathrm{m}$$

και η πλευρά του τετραγώνου $\frac{x}{4}=\frac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\frac{8}{\pi+4}\,\mathrm{m}$. Άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,8)$ τέτοιο ώστε $E(x_0)=5$.

→ Η $E(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ άρα το σύνολο τιμών της σ' αυτό το διάστημα είναι το $E(A_1)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to0^+}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$ διότι

$$\lim_{x\to0^+}E(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{256}{16\pi}=\frac{16}{\pi}\quad\text{και}\quad E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{16}{\pi+4}\ .$$

Παρατηρούμε ότι το $5\in\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$ και επειδή η $E(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$ τέτοιο ώστε $E(x_0)=5$.

→ Η $E(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το $E(A_2)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to8^-}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$ διότι

$$\lim_{x\to8^-}E(x)=\lim_{x\to8^-}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{(\pi+4)\cdot8^2-64\cdot8+256}{16\pi}=\frac{64\pi+256-512+256}{16\pi}=\frac{64\pi}{16\pi}=4\ .$$

Παρατηρούμε ότι το $5 \notin \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$ άρα η εξίσωση $E(x)=5$ δεν έχει λύση στο $A_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$.

Συνεπώς υπάρχει μοναδικός τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m , ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5m^2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f = \mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων ($e^{x-\alpha}$ σύνθεση των παραγωγίσιμων $x-\alpha$, e^x, και της $-x^2$) άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (2e^{x-\alpha} - x^2)' = 2e^{x-\alpha} - 2x$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f''(x) = (2e^{x-\alpha} - 2x)' = 2e^{x-\alpha} - 2 = 2(e^{x-\alpha} - 1)$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(e^{x-\alpha} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq \alpha$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f''	-		+

Δηλαδή η f'' μηδενίζεται στο x = α και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο οπότε το A(α, f(α)), με $f(\alpha) = 2-\alpha^2$ είναι μοναδικό σημείο καμπής.

Δ2. Είναι $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f''	-		+
f'	↘		↗

Οπότε η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x = α το $f'(\alpha) = 2 - 2\alpha = 2(1-\alpha)$.

Είναι $\alpha > 1 \Leftrightarrow 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow f'(\alpha) < 0$

Επίσης

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x-\alpha} - 2x = +\infty$

Γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x-\alpha} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$

Και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{x-\alpha} - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{x-\alpha}(1-\dfrac{x}{e^{x-\alpha}}) = +\infty$

Γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{x-\alpha} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x-\alpha}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x)'}{(e^{x-\alpha})'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{x-\alpha}} = 0$

Οπότε η f' γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, \alpha]$ με $f'(\Delta_1) = [2(1-\alpha), +\infty)$ και f' γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [\alpha, +\infty)$ με $f'(\Delta_2) = [2(1-\alpha), +\infty)$

Παρατηρούμε ότι $0 \in f'(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει μοναδικό (f' γνησίως φθίνουσα) $x_1 \in \Delta_1$ με $f'(x_1) = 0$

Ομοίως $0 \in f'(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει μοναδικό (f' γνησίως αύξουσα) $x_2 \in \Delta_2$ με $f'(x_2) = 0$.

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

Για $x < x_1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1)$

$x_1 < x < \alpha \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1) > f'(x)$

$\alpha < x < x_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_2)$

$x_2 < x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x_2) < f'(x)$

Επίσης η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < \alpha < x_2$ δηλαδή $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3. Θέτω $g(x)=f(x)-f(1)$, $x\in[\alpha,x_2]\subset\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, με

$g'(x)=f'(x)<0$ στο (α,x_2) (από Δ2), οπότε g γνησίως φθίνουσα. Επομένως

$\alpha<x<x_2\Rightarrow g(\alpha)>g(x)$ (1)

Έχουμε $g(\alpha)=f(\alpha)-f(1)=1-\alpha^2-2e^{1-\alpha}<0$

Γιατί $\alpha>1\Leftrightarrow 1-\alpha^2<0$ και $-2e^{1-\alpha}<0$.

Οπότε $(1)\Leftrightarrow g(x)<0\Leftrightarrow f(x)<f(1)\forall x\in(\alpha,x_2)$

Επομένως η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α,x_2).

Δ4. Αν α = 2 το σημείο καμπής είναι Α(2 , -2). Η εξίσωση εφαπτομένης στο Α είναι

$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+2$

Στο $[2,3]\subseteq[2,+\infty)$ η f είναι κυρτή οπότε η εφαπτόμενη βρίσκεται κάτω από την C_f και το μόνο κοινό σημείο είναι το Α.

Οπότε $f(x)\geq -2x+2$

Επιπλέον $\sqrt{x-2}\geq 0, x\in[2,3]$, άρα $f(x)\sqrt{x-2}\geq(-2x+2)\sqrt{x-2}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 2.

Επομένως $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}dx$

Είναι $I=\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}dx$

Θέτω $u=\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x=u^2+2, dx=2udu$

Και όταν $x=2 \Leftrightarrow u=0$

Και όταν $x=3 \Leftrightarrow u=1$

$$I=\int_0^1(-2(u^2+2)+2)u2udu=-4\int_0^1(u^4+u^2)du=-4[\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}]_0^1=-\frac{32}{15}$$

Άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$

Επιμέλεια απαντήσεων: Μίλτος Τσαλιγόπουλος, Μαρία Βαλιάδη, Βασίλειος Μαστρογεωργίου, Θωμάς Καραγιάννης, Νατάσα Παπαγούλα, Ηλίας Κουντούπης