

Πρώτη
Επιλογή



ΣΥΓΧΡΟΝΟ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α.

A.1. Θεωρία (σχολικό βιβλίο σελίδα 251)

A.2. Θεωρία (σχολικό βιβλίο σελίδα 273)

A.3. Θεωρία (σχολικό βιβλίο σελίδα 150)

A.4. α.) Λ

β.) Σ

γ.) Σ

δ.) Σ

ε.) Λ



Θέμα Β.

B.1. $2|z|^2 + (z+\bar{z}) \cdot i - 4 - 2i = 0$

Έστω : $z = x + yi$ τότε

$$2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Rightarrow$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4 + (2x - 2)i = 0 \Rightarrow$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \text{ και } 2x - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad x = 1$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

Άρα $z_1 = 1 + i$ ή $z_2 = 1 - i$

B.2. $w = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{39} = 3 \left(\frac{(1+i) \cdot (1+i)}{1^2 - i^2} \right)^{39} = 3 \left(\frac{2i}{2} \right)^{39} = 3 \cdot i^{39} = 3 \cdot i^{4 \cdot 9 + 3} = -3i$

B.3. $|u+w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow$

$$|u+w| = |4 + 4i - 1 + i - 1| \Leftrightarrow$$

$$|u+w| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u+3i| = 5$$

Άρα κύκλος $K(0,3)$ $\rho=5$

Θέμα Γ.

Πατρόκλου 75 & Αίαντος - Κεντρική Πλατεία Ιλίου

210 2693484 – 210 2617652

www.sygxrono.gr



$$h(x) = x - \ln(e^x + 1)$$

$$A_f: \mathbb{R}$$

$$\text{Γ.1. } h'(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1} e^x = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} > 0$$

$$h''(x) = \left[(e^x + 1)^{-1} \right]' = -1(e^x + 1)^{-2} \cdot (e^x + 1)' = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$$

Άρα η h είναι κοίλη

$$\text{Γ.2. } e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \stackrel{\ln \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln e^{h(2h'(x))} < \ln \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow$$

$$h(2h'(x)) \ln e < \ln e - \ln(e+1) \Leftrightarrow h\left(2 \frac{1}{e^x + 1}\right) 1 < 1 - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$h\left(\frac{2}{e^x + 1}\right) < h(1) \stackrel{h \uparrow}{\Leftrightarrow} \frac{2}{e^x + 1} < 1 \stackrel{e^x + 1 > 0}{\Leftrightarrow} 2 < e^x + 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$$

Γ.3. Οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x}{e^x + 1} \right)$$

$$\bullet \text{ Αν } u = \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = \lim_{u \rightarrow 1} (\ln u) = \ln 1 = 0$$

άρα οριζόντια ασύμπτωτη η $y=0$ όταν $x \rightarrow +\infty$

Πλάγια ασύμπτωτη



$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = 1 - 0 = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln(e^x + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(e^x + 1)) = 0$$

Άρα πλάγια ασύμπτωτη η $\varepsilon: y=x$ όταν $x \rightarrow -\infty$

$$\text{Γ.4. } \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (h(x) + \ln 2) = 0 \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} h(x) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - \ln(e^x + 1) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \ln e^x + \ln\left(\frac{2}{e^x + 1}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e^x}{e^x + 1}\right) = \ln 1 \stackrel{1+1}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{2e^x}{e^x + 1} = 1 \Leftrightarrow 2e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 |\varphi(x)| dx$$

Το πρόσημο της $\varphi(x)$ εξαρτάται από το $\ln\left(\frac{2e^x}{e^x + 1}\right)$ οπότε στο $(0,1)$

$$\frac{2e^x}{e^x + 1} > 1 \stackrel{\ln \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln\left(\frac{2e^x}{e^x + 1}\right) > 0 \text{ άρα η } \varphi(x) > 0 \text{ στο } (0,1).$$

$$E = \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 e^x \ln\left(\frac{2e^x}{e^x + 1}\right) dx = \int_0^1 (e^x)' \ln\left(\frac{2e^x}{e^x + 1}\right) dx = \left[e^x \ln\left(\frac{2e^x}{e^x + 1}\right) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \left(\ln\left(\frac{2e^x}{e^x + 1}\right) \right)' dx =$$

$$e \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) - e^0 \ln\left(\frac{2}{2}\right) - \int_0^1 e^x \left(\frac{e^x + 1}{2e^x} \right) \cdot \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} \right)' dx =$$

$$e \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) - 0 - \int_0^1 \frac{e^x + 1}{2} \cdot \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} dx =$$



$$e \ln \left(\frac{2e}{e+1} \right) - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx =$$

$$e \ln \left(\frac{2e}{e+1} \right) - \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^1 =$$

$$e \ln \left(\frac{2e}{e+1} \right) - [\ln(e+1) - \ln 2] =$$

$$e \ln \left(\frac{2e}{e+1} \right) - \ln(e+1) + \ln 2 =$$

$$e \ln \left(\frac{2e}{e+1} \right) + \ln \frac{2}{e+1}$$

Θέμα Δ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Δ.1. Για $x \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-1} \text{ DLH}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$f(0) = 1$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow f$ συνεχής στο $x_0 = 0$

Για $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2}$$



Θέτω $g(x) = x \cdot e^x - e^x + 1$

$$g'(x) = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-		+
g			

Άρα $g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

x	0
f'	
f	

$f \uparrow \mathbb{R}$



Δ.2.α.) $h(x) = \int_1^{2f'(x)} f(u) du$

$$h(0) = \int_1^{2f'(0)} f(u) du = \int_1^1 f(u) du = 0$$

Αφού $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

Άρα $h(x) = 0$, τουλάχιστον μια ρίζα τη $x=0$

Για τη μοναδικότητα :

Έστω : $h(x) = \int_1^{2f'(x)} f(u) du$

Έχουμε δείξει ότι $h(0)=0$. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική ρίζα.

Για $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0$

Για $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0$

Οπότε $f(x) = \frac{e^x - 1}{x} > 0$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή $h(x) = 0$ μόνο αν $2f'(x)=1$.

Οπότε $2f'(x)=1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = f'(0) \stackrel{f' \uparrow}{\Rightarrow} x=0$

Άρα $x=0$ μοναδική ρίζα.



β.)

$$x'(t) = 2f'(x(t))x'(t) \stackrel{x'(t) > 0}{\Leftrightarrow} 1 = 2f'(x(t)) \Leftrightarrow f'(x(t)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x(t)) = f'(0) \stackrel{1-1 \text{ λόγω } f' \uparrow}{\Leftrightarrow} x(t) = 0$$

$$\text{Άρα } M(x_0, f(x_0)) \Rightarrow M(0, 1)$$

Δ.3.

$$g(x) = \left(x \frac{e^x - 1}{x} + 1 - e \right)^2 (x-2)^2 \Rightarrow$$

$$g(x) = (e^x - 1 + 1 - e)^2 (x-2)^2 \Rightarrow$$

$$g(x) = (e^x - e)^2 (x-2)^2$$

$$\text{Άρα } g(x) = [(e^x - e)(x-2)]^2$$

$$\text{Άρα } g'(x) = 2(e^x - e)(x-2) [(e^x - e)(x-2)]'$$

$$g'(x) = 2(e^x - e)(x-2) [e^x(x-2) + e^x - e]$$

$$g'(x) = 2(e^x - e)(x-2)(x \cdot e^x - 2e^x + e^x - e)$$

$$g'(x) = 2(e^x - e)(x-2)(x \cdot e^x - e^x - e)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$



$$x \cdot e^x - e^x - e = 0$$

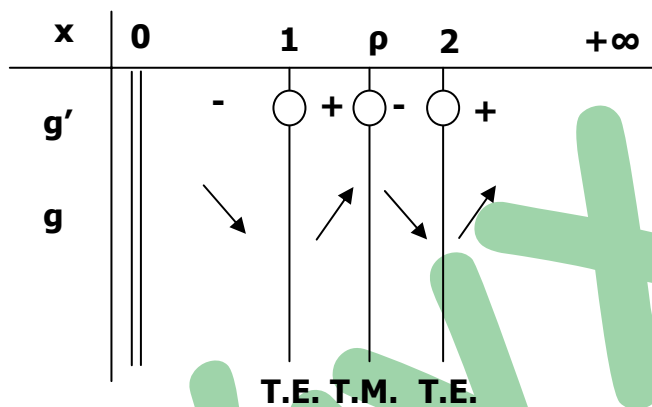
$$\text{Αν } H(x) = x \cdot e^x - e^x - e, x \in [1,2]$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η H έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ στο $(1,2)$

και επειδή

$$H'(x) = x \cdot e^x > 0 \text{ οπότε } H \uparrow, \text{ η ρίζα } \rho \text{ είναι μοναδική}$$

Οπότε έχουμε :



Άρα η g έχει 2 τοπικά ελάχιστα στο $x_1=1$ και $x_2=2$ και 1 τοπικό μέγιστο στο $(1,2)$.

Επιμέλεια Απαντήσεων : Ανδριώτης Δημήτρης ,
Διακοηλίας Κων/νος ,
Δελή Κατερίνα