

Πρώτη  
Επιλογή



**ΣΥΓΧΡΟΝΟ**  
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

## **ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**Θέμα Α.**

**A.1.** σελίδα 28 (σχολικού βιβλίου) Απόδειξη

**A.2.** σελίδα 14

**A.3.** σελίδα 87

**A.4. α.** Λ

**β.** Σ

**γ.** Λ

**δ.** Λ

**ε.** Λ



**Θέμα Β.**

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

$$A = \{\omega_1, \omega_4\} \quad B = \{\omega_1, \omega_3\}$$

**Β.1.** Το  $P(\omega_1) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1}{x^3+x^2} =$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - 1) \cdot (\sqrt{x^2+x+1} + 1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1} + 1)}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1} + 1)}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1} + 1)}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x(\sqrt{x^2+x+1} + 1)} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{-1(\sqrt{1-1+1} + 1)} = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Άρα  $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{x}{3} \ln x$ ,  $x > 0$  παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\right)' \cdot \ln x + \frac{x}{3} \cdot (\ln x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln x + \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln x + \frac{1}{3}$$



$$\text{Οπότε : } P(\omega_3) = f'(1) = \frac{1}{3} \cdot \ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } P(\omega_3) = \frac{1}{3}$$

**B.2.** Αφού  $A = \{\omega_1, \omega_4\}$  το  $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

$$\text{το } \{\omega_3\} \subseteq A' \Rightarrow P(\omega_3) \leq P(A') \text{ άρα } \frac{1}{3} \leq P(A')$$

$$\text{Θέλω να δείξω ότι : } P(A') \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) \geq 1 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) \geq \frac{1}{4}$$

$$\text{Το οποίο ισχύει αφού } \{\omega_1\} \subseteq A \text{ και επομένως } P(\omega_1) \leq P(A) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq P(A)$$

$$\text{Άρα, } \frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$$

**B.3.**  $A = \{\omega_1, \omega_4\}$

$A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

$B = \{\omega_1, \omega_3\}$

$B' = \{\omega_2, \omega_4\}$

$$P(A') = P(\omega_2) + P(\omega_3) \Leftrightarrow \frac{3}{4} = P(\omega_2) + P(\omega_3) \quad (1)$$

Επίσης :

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} P(\omega_1) + \frac{3}{4} + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow P(\omega_4) = 1 - 1 \Leftrightarrow \boxed{P(\omega_4) = 0}$$

$$\text{Αφού : } P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} + P(\omega_2) + \frac{1}{3} + 0 = 1 \Leftrightarrow P(\omega_2) = 1 - \frac{7}{12} \Leftrightarrow \boxed{P(\omega_2) = \frac{5}{12}}$$



$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{7}{12}$$

$$A \cap B = \{\omega_1\} \text{ οπότε } P(A \cap B) = P(\omega_1) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} P[(A-B) \cup (B-A)] &= P(A-B) + P(B-A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - \frac{2}{4} = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι :

$$A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$$

$$\text{Άρα } P(A' - B') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

### Θέμα Γ.

**Γ.1.** Έστω η μικρότερη τιμή της κλάσης ότι είναι  $a$ .

$$\text{Τότε } a = 50 \text{ και η κεντρική τιμή } x_4 = 85, \text{ τότε } \frac{a+3c+a+4c}{2} = 85 \Leftrightarrow \boxed{c = 10}$$



**Γ.2.**  $\bar{x} = 74 \Leftrightarrow x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85 \cdot 2 \cdot f_3 = 74$

$$55f_1 + 65f_2 + 245f_3 = 74 \quad (1)$$

Επίσης  $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 3f_3 = 1 \quad (2)$

Επειδή  $\delta = 75$  και αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων έχουμε :

$$f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = \frac{f_3}{2} + f_4 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = f_4 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 2f_3 \Leftrightarrow f_1 + f_2 - 2f_3 = 0 \quad (3)$$

Από σύστημα των (1),(2),(3) έχουμε :

$$f_1 = 0,1$$

$$f_2 = 0,3$$

$$f_3 = 0,2$$

$$f_4 = 0,4$$

Οπότε :

ΚΛΑΣΕΙΣ	Κεντρικές Τιμές ( $x_i$ )	Σχετική Συχνότητα ( $f_i$ )
[50 ,60 )	55	0,1
[60 ,70 )	65	0,3
[70, 80 )	75	0,2
[80 ,90 )	85	0,4
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	-	1



$$\Gamma.3. \quad \bar{x}' = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v_1 + v_2 + v_3} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x}' = \frac{x_1 \frac{v_1}{v} + x_2 \frac{v_2}{v} + x_3 \frac{v_3}{v}}{\frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \frac{v_3}{v}} = \frac{55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2}{0,1 + 0,3 + 0,2} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}$$

$$\Gamma.4. \quad \left. \begin{array}{l} \bar{x} + 2s = 74 \\ \bar{x} - s = 68 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \bar{x} + 2s = 74 \\ -\bar{x} + s = -68 \end{array} \right\} \text{Άρα } 3s = 6 \Leftrightarrow \boxed{s=2}, \boxed{\bar{x}=70}$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} = 0,028 < 0,1.$$

Είναι ομοιογενές.

### Θέμα Δ.

$$\Delta.1. \quad f(x) = x \ln x + \kappa, \quad x > 0 \quad \kappa > 1$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad \text{με } f'(1) = 1 \text{ και } f(1) = \kappa$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο (1, f(1))

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$y - \kappa = 1 \cdot (x - 1)$$

$$(\epsilon) : y = x - 1 + \kappa \quad (1)$$

Η (ε) τέμνει τους άξονες :

$$x'x : \text{για } y = 0 \quad x = 1 - \kappa \quad \text{άρα } A = (1 - \kappa, 0)$$

$$y'y : \text{για } x = 0 \quad y = \kappa - 1 \quad \text{άρα } B = (0, \kappa - 1)$$



Το ζητούμενο εμβαδό  $E$  είναι :

$$E = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2}|1 - \kappa| \cdot |\kappa - 1| = \frac{1}{2}|\kappa - 1|^2$$

$$\text{Αφού } E < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\kappa - 1|^2 < 2 \Leftrightarrow |\kappa - 1|^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$$

Επειδή  $\kappa$  ακέραιος με  $\kappa > 1$  το  $1 < \kappa < 3$  οπότε  $\boxed{\kappa = 2}$

**Δ.2. α.)** Λόγω του Δ.1. η  $(\varepsilon)$   $y = x + 1$

Επειδή τα σημεία  $M(x_i, y_i)$   $i = 1, 2, \dots, 50$  ανήκουν στην  $(\varepsilon)$  ισχύει :

$$y_i = x_i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, 50$$

Οπότε από γνωστή εφαρμογή :

$$\bar{y} = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 30}$$

**β.)** Η καινούρια μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι :

$$\bar{x}' = \frac{(x_1 + 3 + x_2 + 3 + \dots + x_{20} + 3) + (x_{21} + x_{22} + \dots + x_{35}) + (x_{36} - \lambda + x_{37} - \lambda + \dots + x_{50} - \lambda)}{50}$$

$$\bar{x}' = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{50}) + 3 \cdot 20 - 15 \cdot \lambda}{50} \Leftrightarrow 31 = \frac{\bar{x} \cdot 50 + 60 - 15\lambda}{50} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{3}}$$

**Δ.3.**  $f(x) = x \ln x + 2$  με  $f'(x) = \ln x + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$



<b>x</b>	<b>0</b>	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
<b>f'(x)</b>	-	○	+
<b>f(x)</b>	↘		↗

$$\frac{1}{e} < a < \beta < \gamma < e \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{e}\right) < f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

$$\text{όπου } f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{1}{e} > 0 \quad f'\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + 1 = 0$$

$$\text{Οπότε έχουμε : } f'\left(\frac{1}{e}\right) < f\left(\frac{1}{e}\right) < f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

$$\text{Επομένως : } R = f(e) - f\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2 - 0 = e + 2$$

$$\bar{x} = \frac{f\left(\frac{1}{e}\right) + f(a) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e)}{5} = \frac{0 + a \ln a + 2 + \beta \ln \beta + 2 + \gamma \ln \gamma + 2 + e + 2}{5} = \frac{\ln e^7 + 8 + e}{5} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{15 + e}{5}}$$

**Δ.4.** Για το Α ενδεχόμενο ισχύει :

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{e}$$

$$\text{Άρα } A = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{30}\}$$

Για το Β ενδεχόμενο ισχύει :

$$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow \ln t \cdot (t-1) > 0$$



Πρώτη  
Επιλογή



Από πίνακα προσήμων έχουμε  $B = \{t_1, t_2, \dots, t_{29}\}$

α.) Επειδή είναι ισοπίθανα :  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{3}$

β.)  $A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{29}\}$  και επειδή είναι ισοπίθανα

Άρα  $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$

**Επιμέλεια Απαντήσεων :**

**για το Σύγχρονο Φροντιστήριο Μ.Ε. :**

**Ανδριώτης Δημήτρης - Δελή Κατερίνα - Διακοηλίας Κων/νος**