ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α.

Α.1. σελίδα 28 (σχολικού βιβλίου) Απόδειξη

Α.2. σελίδα 14

Α.3. σελίδα 87

Α.4. **α.** Λ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Λ

Θέμα Β.

$\Omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$

$A = \omega_1, \omega_4$ $\qquad$ $B = \omega_1, \omega_3$

Β.1. Το $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} =$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1 \cdot \sqrt{x^2+x+1}+1}{x^2\ x+1\ \sqrt{x^2+x+1}+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x\cancel{+1}\cancel{-1}}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\ \sqrt{x^2+x+1}+1} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\cdot\frac{1}{-1\ \sqrt{1-1+1}+1} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Άρα $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{x}{3}\ln x,\ x > 0$ παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\right)' \cdot \ln x + \frac{x}{3} \cdot \ \ln x\ '$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln x + \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln x + \frac{1}{3}$$

Οπότε : $P(\omega_3)=f'(1)=\frac{1}{3}\cdot \ln 1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Άρα $P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

B.2. Αφού $A=\ \omega_1,\omega_4$ το $A'=\ \omega_2,\omega_3$

το $\omega_3\ \subseteq A' \Rightarrow P(\omega_3)\le P(A')$ άρα $\frac{1}{3}\le P(A')$

Θέλω να δείξω ότι : $P\ \ A'\ \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1-P(A)\le \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A)\ge 1-\frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A)\ge \frac{1}{4}$

Το οποίο ισχύει αφού $\omega_1\ \subseteq A$ και επομένως $P(\omega_1)\le P(A) \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le P(A)$

Άρα, $\frac{1}{3}\le P(A')\le \frac{3}{4}$

B.3. $A=\ \omega_1,\omega_4$ $A'=\ \omega_2,\omega_3$

$B=\ \omega_1,\omega_3$ $B'=\ \omega_2,\omega_4$

$P(A')=P(\omega_2)+P(\omega_3) \Leftrightarrow \frac{3}{4}=P(\omega_2)+P(\omega_3)$ (1)

Επίσης :

$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} P(\omega_1)+\frac{3}{4}+P(\omega_4)=1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+P(\omega_4)=1 \Leftrightarrow P(\omega_4)=1-1 \Leftrightarrow \boxed{P(\omega_4)=0}$

Αφού : $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4}+P(\omega_2)+\frac{1}{3}+0=1 \Leftrightarrow P(\omega_2)=1-\frac{7}{12} \Leftrightarrow \boxed{P(\omega_2)=\frac{5}{12}}$

$P(A) = P(\omega_1)+P(\omega_4) = \frac{1}{4}$

$P(B) = P(\omega_1)+P(\omega_3) = \frac{7}{12}$

$A \cap B = \{\omega_1\}$ οπότε $P(A \cap B) = P(\omega_1)=\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} P\left[(A-B) \cup (B-A)\right] &= P(A-B) + P(B-A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - \frac{2}{4} = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι :

$A'-B'=A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$

Άρα $P(A' - B')= P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Θέμα Γ.

Γ.1. Έστω η μικρότερη τιμή της κλάσης ότι είναι α.

Τότε α = 50 και η κεντρική τιμή x_4 = 85 , τότε $\frac{\alpha+3c+\alpha+4c}{2} = 85 \Leftrightarrow \boxed{c = 10}$

Γ.2. $\bar{x} = 74 \Leftrightarrow x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85 \cdot 2 \cdot f_3 = 74$

$55f_1 + 65f_2 + 245f_3 = 74 \;\; (1)$

Επίσης $f_1+f_2+f_3+f_4 = 1 \Leftrightarrow f_1+f_2 + 3f_3 = 1 \;\; (2)$

Επειδή δ = 75 και αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων έχουμε :

$f_1+f_2+\frac{f_3}{2} = \frac{f_3}{2} + f_4 \Leftrightarrow f_1+f_2 = f_4 \Leftrightarrow f_1+f_2 = 2f_3 \Leftrightarrow f_1+f_2 - 2f_3 = 0 \;\; (3)$

Από σύστημα των (1),(2),(3) έχουμε :

$f_1=0,1$

$f_2=0,3$

$f_3=0,2$

$f_4=0,4$

Οπότε :

ΚΛΑΣΕΙΣ	**Κεντρικές Τιμές (x_i)**	**Σχετική Συχνότητα (f_i)**
[50 ,60)	55	0,1
[60 ,70)	65	0,3
[70, 80)	75	0,2
[80 ,90)	85	0,4
ΣΥΝΟΛΟ	-	1

Γ.3. $\bar{x}'=\dfrac{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3}{v_1+v_2+v_3} \Leftrightarrow$

$$\bar{x}'=\frac{x_1\frac{v_1}{v}+x_2\frac{v_2}{v}+x_3\frac{v_3}{v}}{\frac{v_1}{v}+\frac{v_2}{v}+\frac{v_3}{v}}=\frac{55\cdot 0,1+65\cdot 0,3+75\cdot 0,2}{0,1+0,3+0,2}=\frac{40}{0,6}=\frac{200}{3}$$

Γ.4. $\left.\begin{matrix}\bar{x}+2s=74\\ \bar{x}-s=68\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\bar{x}+2s=74\\ -\bar{x}+s=-68\end{matrix}\right\}$ Άρα $3s = 6 \Leftrightarrow \boxed{s=2}, \boxed{\bar{x}=70}$

$CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{2}{70}=0,028<0,1$.

Είναι ομοιογενές.

Θέμα Δ.

Δ.1. $f(x) = x\ln x + \kappa,\ \ x>0\ \ \kappa>1$

$f'(x) = \ln x+1$, με $f'(1)=1$ και $f(1) = \kappa$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο (1,f(1))

$y-f(1)=f'(1)\cdot\ x-1$

$y - \kappa = 1\cdot\ x-1$

(ε) : $y = x-1+\kappa$ (1)

Η (ε) τέμνει τους άξονες :

x′x : για $y = 0$ $\quad x = 1-\kappa$ $\quad$ άρα $\quad A = (1-\kappa,0)$

y′y : για $x = 0$ $\quad y = \kappa-1$ $\quad$ άρα $\quad B = (0, \kappa-1)$

Το ζητούμενο εμβαδό Ε είναι :

$$E = \frac{1}{2}\,OA \cdot OB = \frac{1}{2}|1-\kappa|\cdot|\kappa-1| = \frac{1}{2}|\kappa-1|^2$$

Αφού $E < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\kappa-1|^2 < 2 \Leftrightarrow |\kappa-1|^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa-1| < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$

Επειδή κ ακέραιος με κ>1 το 1<κ<3 οπότε $\boxed{\kappa = 2}$

Δ.2. **α.)** Λόγω του Δ.1. η (ε) y= x+1

Επειδή τα σημεία M(xi,yi) i = 1,2,…,50 ανήκουν στην (ε) ισχύει :

$y_i = x_i + 1, \quad i = 1,2,\ldots,50$

Οπότε από γνωστή εφαρμογή :

$\bar{y} = \bar{x}+1 \Leftrightarrow 31 = \bar{x}+1 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x}=30}$

β.) Η καινούρια μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι :

$$\bar{x}' = \frac{x_1+3+x_2+3+\ldots+x_{20}+3 \;+\; x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{35} \;+\; x_{36}-\lambda+x_{37}-\lambda+\ldots+x_{50}-\lambda}{50}$$

$$\bar{x}' = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{50} + 3\cdot 20 - 15\cdot\lambda}{50} \Leftrightarrow 31 = \frac{\bar{x}\cdot 50+60-15\lambda}{50} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{3}}$$

Δ.3. $f(x) = x\ln x+2$ με $f'(x) = \ln x+1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

x	**0**		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f′(x)		$-$ $\nearrow$	$\searrow$	$+$ $\searrow$	
f(x)		$\searrow$		$\searrow$	

$$\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$$

όπου $f\left(\frac{1}{e}\right)=2-\frac{1}{e}>0$ $\quad f'\left(\frac{1}{e}\right)=-1+1=0$

Οπότε έχουμε : $f'\left(\frac{1}{e}\right)<f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

Επομένως : $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2-0=e+2$

$$\bar{x}=\frac{f'\left(\frac{1}{e}\right)+f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)}{5}=\frac{0+\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2+e+2}{5}=\frac{\ln e^{7}+8+e}{5}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\bar{x}=\frac{15+e}{5}}$$

Δ.4. Για το Α ενδεχόμενο ισχύει :

$f'(t)>0 \Leftrightarrow t>\frac{1}{e}$

Άρα $A= t_{11},t_{12},...t_{30}$

Για το Β ενδεχόμενο ισχύει :

$f(t)>f'(t)+1 \Leftrightarrow \ln t\cdot\ t-1>0$

Από πίνακα προσήμων έχουμε B= $t_1,t_2,...,t_{29}$

α.) Επειδή είναι ισοπίθανα : $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{2}{3}$

β.) $A\cap B=$ $t_{11},t_{12},...,t_{29}$ και επειδή είναι ισοπίθανα

Άρα $P\ \ A\cap B\ \ =\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{19}{30}$

Επιμέλεια Απαντήσεων :

για το Σύγχρονο Φροντιστήριο Μ.Ε. :

Ανδριώτης Δημήτρης - Δελή Κατερίνα – Διακοηλίας Κων/νος