ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α.

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελ 334-335

Α.2. Σχολικό βιβλίο σελ 246

Α.3. Σχολικό σελίδα 222

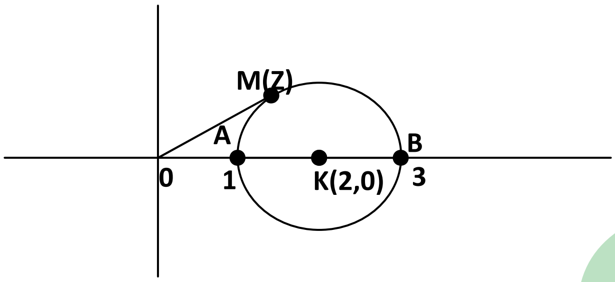
Α.4.
α. Λ
β. Σ
γ. Σ
δ. Λ
ε. Σ

Πατρόκλου 75 & Αίαντος - Κεντρική Πλατεία Ιλίου
210 2693484 – 210 2617652
www.sygxrono.gr

Θέμα Β.

Β.1. $|z-2||\bar{z}-2| + |z-2| = z \Leftrightarrow |z-2||\overline{z-2}| + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0$

Θέτω $|z-2| = \omega$



$\omega^2 + \omega - 2 = 0$

$(\omega+2)(\omega-1) = 0$

$\omega = 1$ ή $\omega = -2$ (απορ)

$|z-2| = 1 \Rightarrow$ Ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με Κ(2,0), ρ=1,με C: $(x-2)^2+\psi^2=1$

Αφού ο z κινείται στο παραπάνω κύκλο C, ισχύει $(OA) \le (OM) \le (OB) \Rightarrow 1 \le |z| \le 3$

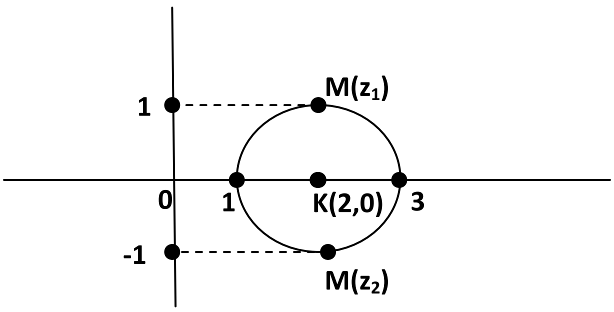
Β.2. $w^2+\beta w+\gamma=0$

Από τύπους Vietta : $S = z_1+z_2 = -\beta$ (1) $P = z_1 z_2 = \gamma$ (2)

Έστω $z_1 = x_1+\psi_1 i$ και $z_2=x_2+\psi_2 i$

Από $|Im(z_1) - Im(z_2)| = 2 \Rightarrow |\psi_1 - \psi_2|=2$

Αφού η απόσταση των φανταστικών μερών ισούται με z = 2ρ, οι εικόνες των z_1,z_2 είναι σημεία αντιδιαμετρικά του παραπάνω κύκλου οπότε :



Άρα , έστω : $z_1 = 2+i$ και $z_2 = 2-i$

Από (1),(2) $\Rightarrow \begin{cases} (2+i)+(2-i) = -\beta \\ (2+i)(2-i) = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \gamma = +5 \end{cases}$

Β.3. $|v|^3 = |a_2v^2+a_1v+a_0| \le |a_2|\cdot|v|^2+|a_1|\cdot|v|+|a_0| \le 3|v|+3$

Αν υποθέσουμε ότι $|v| \ge 4$ τότε:

$|v|^3 \ge 4\cdot|v|^2 = 3\cdot|v|^2+|v|^2 \ge 3\cdot|v|^2+4|v| \ge 3\cdot|v|^2+3\cdot|v|+4 > 3|v|+3$ άτοπο.

Θέμα Γ.

Γ.1. $(f(x)+x)\cdot(f'(x)+1) = x \Leftrightarrow (f(x)+x)\cdot(f'(x)+x') = x \Leftrightarrow$

$2(f(x)+x)\cdot(f(x)+x)' = 2x \Leftrightarrow \left[(f(x)+x)^2\right]' = \left[x^2\right]' \Leftrightarrow (f(x)+x)^2 = x^2+c$

Για x=0 : $(f(0))^2 = c \Rightarrow c = 1$

Άρα : $(f(x)+x)^2 = x^2+1 \Rightarrow f(x)+x = \pm\sqrt{x^2+1}$

Η f(x)+x είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και δεν έχει ρίζα. Οπότε διατηρεί πρόσημο και επειδή f(0)+0=1 >0 είναι f(x)+x > 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε : $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

Γ.2. $f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1.

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$f\left(g(x)\right)=f(0)\Leftrightarrow g(x)=0$

$g'(x)\ =\ 3x^2+3x\ =\ 3x(x+1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$		↗	Τ.Μ	↘	Τ.Ε.	↗	

T_M : $g(-1)=-\dfrac{1}{2}$ και T_E : $g(0)=-1$

- $(-\infty,-1]$ η $g\uparrow$

  $g(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(-1)\right)=(-\infty,-\dfrac{1}{2}]$, $0\notin g(\Delta_1)$

- $[-1,0]$ η $g\downarrow$

  $g(\Delta_2)=[g(0),g(-1)]=[-1,-\dfrac{1}{2}]$, $0\notin g(\Delta_2)$

- $[0,+\infty)$ η $g\uparrow$

  $g(\Delta_3)=[g(0),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)]=[-1,+\infty)$, $0\in g(\Delta_3)$

  και αφού η $g\uparrow$ η ρίζα είναι μοναδική.

Γ.3. Έστω η συνάρτηση h με :

$$h(x)\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt-f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x, \qquad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

- Η h είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{0}^{0} f(t)dt - f(0)\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=-1<0$

  $h(0)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt>0$ διότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

  Άρα $h\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot h(0)<0$

  Άρα για την h ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, οπότε η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Θέμα Δ.

Δ.1. Είναι : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=$$

$$=5\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}=5f'(1)+f'(1)=6f'(1)$$

Άρα: $f'(1)=0$

Είναι : $x>1 \Leftrightarrow f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$

$x<1 \Leftrightarrow f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$

Δ.2. Είναι $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}$, $x>1$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ είναι

$x>1 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \Leftrightarrow f(x)-1>0$

Επομένως $g'(x)>0$, $x>1$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

Έστω η συνάρτηση h με $h(x)=\int_{x}^{x+1} g(u)du, x>1$ και

$h'(x)=g(x+1)-g(x)>0$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα,

Οπότε η αρχική σχέση γίνεται ισοδύναμα :

$h(8x^2+5)>h(2x^4+5) \Leftrightarrow$

$8x^2+5>2x^4+5 \Leftrightarrow 2x^4<8x^2 \Leftrightarrow$

$2x^2(x^2-4)<0 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow -2<x<2$

Δ.3. Είναι $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}, x>1$ και $g''(x)=\frac{f'(x)(x-1)-f(x)+1}{(x-1)^2}, x>1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της σε οποιοδήποτε σημείο της x_0 είναι

$y=f(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ και επειδή η f είναι κυρτή ισχύει :

$$f(x) \geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

οπότε για x=1 είναι :

$$f(1) \geq f'(x_0)(1-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0)(1-x_0)+f(x_0)-1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0)(x_0-1)-f(x_0)+1 \geq 0$$

σχέση που ισχύει για κάθε $x_0>0$

Άρα $g''(x)>0,\ x>1$ άρα η g είναι κυρτή

Έστω συνάρτηση H με $H(x)=(\alpha-1)g(x)-(f(\alpha)-1)(x-\alpha)^{\alpha},\ x>1$

Παρατηρώ ότι $H(\alpha)=0$.

$$H'(x)=(\alpha-1)g'(x)-(f(\alpha)-1)=(\alpha-1)\left(g'(x)-\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\right)=(\alpha-1)\left(g'(x)-g(\alpha)\right)$$

- Αν $x<\alpha\quad g'(x)<g'(\alpha)\Rightarrow g'(x)-g'(\alpha)<0$.

  Άρα $H'(x)<0$ οπότε H φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

- Αν $x>\alpha\ \Rightarrow g'(x)>g'(\alpha)\Rightarrow g'(x)-g'(\alpha)>0$.
  Άρα $H'(x)>0$ οπότε H αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Επομένως η $H(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(1,+\infty)$.

Επιμέλεια Απαντήσεων :

Για το ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.

Ανδριώτης Δημήτρης – Δελή Κατερίνα – Διακοηλίας Κων/νος